Univ. Simón Bolívar.
Dpto. de Procesos y Sistemas.
PS2315: "Sistemas". (Trimestre Sep.-Dic. 2011).
Prof. J. Ferrer

Fecha de Entrega:
Martes de 11^{ava} semana.
Hora y Sitio: "Donde siempre".

Tarea 10. (Parte 2)

A cubrir: ✓ Estabilidad absoluta.
✓ Detectabilidad y Estabilizabilidad
✓ Analisis Espectral de Señales y Sistemas.

Problema 1: Un sistema S, LIT descrito por

$$(\nabla x)(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} x(\lambda) + \begin{bmatrix} e^{(-b)} \\ c \\ a^2+a-2 \end{bmatrix} u(\lambda) \quad ; \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

$$y(\lambda) = \left[f^2-2f+2 \,;\, 1 ,\, g+1 \right] x(\lambda) \quad ; \quad f, g \in \mathbb{R}.$$

Determine condiciones sobre $a, b, c, f, g \in \mathbb{R}$ tal que:

i) El sistema $S\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}_x^n$ sea controlable.

ii) El par $\{A, C\}$ sea detectable.

iii) El sistema $S\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}_x^n$ sea observable.

iv) El par $\{A, C\}$ sea detectable.

Problema 2: A continuación se presenta algo planteado por un compañero de Uds: Prof. Ferrer; suponga que tenemos un sistema S

$$u(\lambda) \longrightarrow \boxed{S} \longrightarrow y(\lambda)$$

donde $y = P(u)$

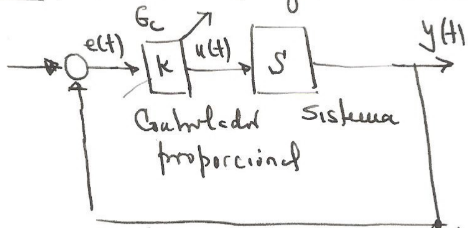
está dado por $S\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}_x^n$

donde sabemos que

$$\forall u \in \mathcal{U},\ \|u\|_\infty < \infty \implies y = S[u] \text{ con } \|y\|_\infty < \infty.$$

(Propiedad E/S), ¿cómo sabe Ud. cómo puedo determinar si S no es estabilizable o no detectable cuando este es un sistema eléctrico? Pregunté: ¿Cómo? y él respondió con un termómetro... ¿Una propiedad estructural como esas puede determinarse en este caso con un termómetro?

Problema 3: Considere el siguiente sistema de tiempo continuo



"Control de un grado de libertad".

Nos dicen que S es un sistema descrito por

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) \end{cases}$$

Parte 1: a) ¿Es la planta S controlable?
b) ¿Es la planta S observable?
c) ¿Es la planta S estabilizable?
d) ¿Es la planta S detectable?

Parte 2: i) determine la función de transferencia de la planta S

$$\hat{h}(s) = \frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)} \quad ;$$

ii) A su juicio como futuro ingeniero, ¿vale la pena dedicar esfuerzo para lograr que el sistema a lazo cerrado; o sea, la función de transferencia

$$\hat{h}_{cl}(s) = \frac{\hat{y}(s)}{r(s)} = \frac{N(s)}{D_{cl}(s)} \; ; \; N, D_{cl} \in \mathbb{R}[s]$$

sea estable.

iii) De ser afirmativa su respuesta, determine el rango de $k \geq 0$ (la ganancia proporcional del controlador) tal que el sistema a L.C. sea estable.

Parte 3: Repita Parte (2) si el controlador G_c es ahora uno del tipo PI cuya función de transferencia es $G_c(s) = k\left(1 + \frac{1}{0.1s}\right)$; $k \geq 0$.

Problema 4: Repita problema (3) pero con

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & +3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t).$$

Importante: "Concluya".

Problema 5: (Teorema de Kharitonov). (Para sistemas de tiempo continuo)

Suponga que se tiene un sistema S descrito por $S\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}_x^n$ con

- $\{A, B\}$ estabilizable
- $\{A, C\}$ detectable.

Suponga además que la función de transferencia de este sistema es

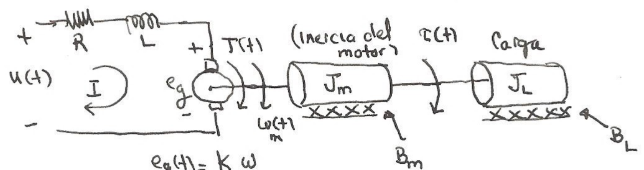
$$\hat{h}(s) = C(sI_n - A)^{-1}B + D = \frac{N(s)}{D(s)};$$

sin embargo

$$D(s) = a_n(q)s^n + a_{n-1}(q)s^{n-1} + \dots + a_1(q)s + a_0(q)$$

donde ahora los coeficientes del polinomio dependen de unos parámetros del sistema que son inciertos

a) Considere el siguiente sistema electromecánico (Control del torque de un motor dc)



$y(t) = \tau(t) =$ torque en la carga

$e_g(t) = K\omega$

$T(t) = KI.$

- Determine el circuito eléctrico correspondiente
- Encuentre la función de transferencia del sistema

$$\hat{h}(s) = \frac{\hat{\tau}(s)}{\hat{u}(s)}$$

en términos de $L, R, J_m, J_L, B_m, B_L, K$

Se sabe que si $q_1 = K$, $q_2 = J_L$ entonces

$J_m = 2\times10^{-3}$ kg-m^3

$B_m = 2\times10^{-5}$ N-m/rps

$L = 10^{-2}$ H. $R = 1\,\Omega$

$B_L = 2\times10^{-5}$ N-m/rps

y $0.2 = \underline{q}_1 \leq q_1 \leq \bar{q}_1 = 0.6$; $10^{-5} = \underline{q}_2 \leq q_2 \leq 3\times10^{-5} = \bar{q}_2$

Entonces el sistema tiene una familia de funciones de transferencia

$$\hat{h}(s,q) = \frac{0.5\, q_1 q_2 s + 10^{-5} q_1}{(10^{-5}+0.005 q_2)s^2 + (0.00102+0.5 q_2)s + (2\times10^{-5}+0.5 q_1^2)} = \frac{N(s)}{D(s,q)}$$

con $q_1 \in [0.2\,;0.6]$; $q_2 \in [10^{-5}, 3\times10^{-5}]$; $q = (q_1, q_2)$

b) El polinomio

$$D(s,q) = (10^{-5}+0.005q_2)s^2 + (0.00102+0.5q_2)s + (2\times10^{-5}+0.5q_1^2)$$

con $q \in Q = [0.2\,;0.6] \times [10^{-5}, 3\times10^{-5}]$ = Espacio Paramétrico

es un ejemplo de polinomio incierto..

Un tipo particular de estos polinomios son los denominados polinomios-intervalo (ó intervalo de polinomios).. Estos son de la forma

$$D(s,q) = q_n s^n + q_{n-1} s^{n-1} + \dots + q_2 s^2 + q_1 s + q_0 \quad \text{con}$$

$$q = (q_0, q_1, \dots, q_n) \in Q = [\underline{q}_0, \overline{q}_0] \times [\underline{q}_1, \overline{q}_1] \times \dots \times [\underline{q}_n, \overline{q}_n]$$

Un parametro lineal por coeficiente..

Kharitonov (matemático ruso) descubrió lo siguiente:

" Construya los siguientes 4 polinomios de Kharitonov

$$K_1(s) = \underline{q}_0 + \underline{q}_1 s + \overline{q}_2 s^2 + \overline{q}_3 s^3 + \underline{q}_4 s^4 + \underline{q}_5 s^5 + \overline{q}_6 s^6 + \dots$$

$$K_2(s) = \overline{q}_0 + \overline{q}_1 s + \underline{q}_2 s^2 + \underline{q}_3 s^3 + \overline{q}_4 s^4 + \overline{q}_5 s^5 + \underline{q}_6 s^6 + \dots$$

$$K_3(s) = \overline{q}_0 + \underline{q}_1 s + \underline{q}_2 s^2 + \overline{q}_3 s^3 + \overline{q}_4 s^4 + \underline{q}_5 s^5 + \underline{q}_6 s^6 + \dots$$

$$K_4(s) = \underline{q}_0 + \overline{q}_1 s + \overline{q}_2 s^2 + \underline{q}_3 s^3 + \underline{q}_4 s^4 + \overline{q}_5 s^5 + \overline{q}_6 s^6 + \dots$$

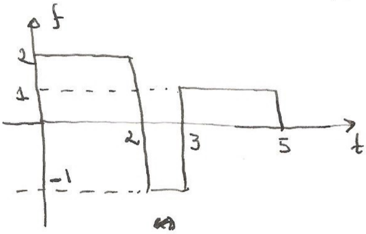
Entonces

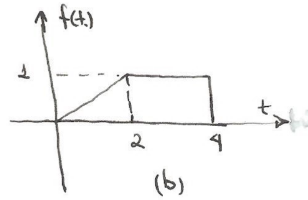
$\forall q \in Q = \bigtimes_{i=0}^{n} [\underline{q}_i, \overline{q}_i]$, $D(s,q)$ es Hurwitz si y solo si todos los polinomios de Kharitonov son Hurwitz.

Aplique el teorema de Kharitonov a $D(s,q) = q_3 s^3 + q_2 s^2 + q_1 s + q_0$ si $0.25 \le q_3 \le 1.25$; $2.75 \le q_2 \le 3.25$; $0.75 \le q_1 \le 1.25$ y $0.25 \le q_0 \le 1.25$ ..

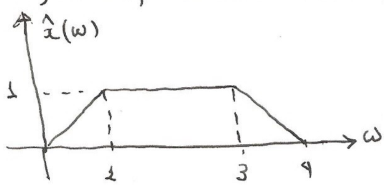
Problemas 5: (Fourier Señales) i) Usando las propiedades de la transformada de Fourier para hallar la transformada $\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$ o espectro de f...

a)





ii) Si $\hat{x}(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$ es la que se muestra en la figura



determine $x(t)$.

iii) Se tiene un sistema S, LIT

$u(t) \rightarrow \boxed{S} \rightarrow y(t)$ cuya respuesta al impulso es $h(t) = \dfrac{\sin 4\pi(t-2)}{t-2}$, $t \in \mathbb{R}$

Determine la respuesta $y(t)$ del sistema cuando se aplica la entrada

$$u(t) = \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) \quad ; \quad t \in (-\infty, +\infty).$$

iv) Si se sabe que

$$x(t) * \left[\frac{d}{dt}x(t)\right] = (1-t)e^{-t} \underbrace{\mathrm{esc}(t)}_{\text{escalón unitario}}$$

determine $x(t)$.

v) La respuesta espectral de un sistema S' (LIT) es

$$\hat{h}(\omega) = \mathcal{F}\{h(t)\} = (1 - e^{2j\omega})^2 \quad ; \quad \omega \in (-\infty, +\infty)$$

$h(t)$ = respuesta al impulso de S'. Determine la respuesta del sistema cuando

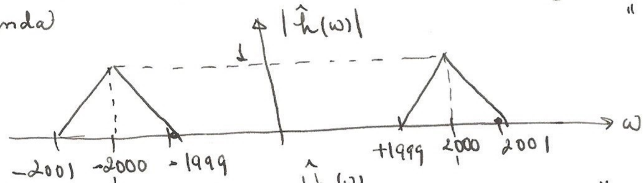
- La entrada es $u(t) = \sin(3\pi t)$; $t \in (-\infty, +\infty)$
- la entrada es $u(t) = \sin(3\pi t)\,\mathrm{esc}(t)$..

///.

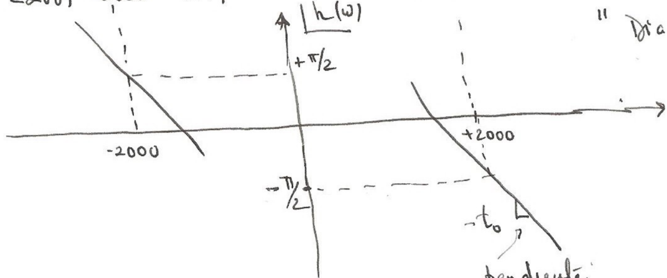
Problema 6 (Análisis Espectral de Sistemas).

1) La respuesta espectral de un sistema S, LIT y estable es del tipo pasabanda

"Espectro de amplitud"



"Diagrama de fase"



Recuerde

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \quad \hat{h}(\omega) = \hat{h}(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\, e^{-j\omega t}\, dt \in \mathbb{C}$$

$$= |\hat{h}(j\omega)|\, e^{j\angle\hat{h}(j\omega)}$$

Determine y grafique la respuesta

$$y(t) = S[u(t)] = h(t) * u(t)$$

Cuando $\qquad u(t) = \dfrac{\sin(t)}{(\pi t)} \cdot \cos(2000t)$

Problema 7: (Sobre filtros).

Sea S un sistema LIT con respuesta al impulso $h(t)$; por lo tanto, su espectro frecuencial está dado por

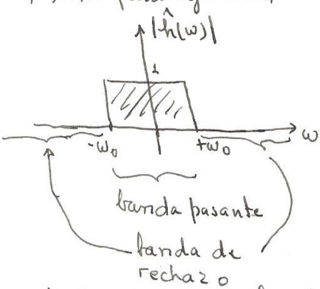
$$\hat{h}(\omega) = |\hat{h}(\omega)|\, e^{j\angle\hat{h}(\omega)} = \mathcal{F}\{h(t)\}$$

Osea $\qquad \hat{u}(\omega) \longrightarrow \boxed{\hat{h}(\omega)} \longrightarrow \hat{y}(\omega) = \hat{h}(\omega)\hat{u}(\omega)$ (Teorema de convolución)

Entonces, S se dice ser un filtro ideal si $|\hat{h}(\omega)|$ es constante en la banda pasante y cero en la banda de cero transmisión (banda de rechazo).

Especificamente:

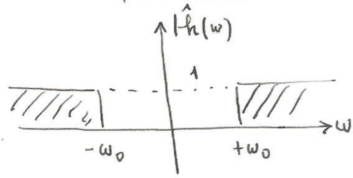
a) filtro pasabajo ideal



<u>Ancho de banda</u> = longitud de la banda pasante

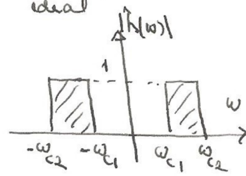
$\boxed{BW = 2\omega_0}$

b). filtro <u>pasa alto ideal</u>



BW no está definido

c) filtro pasabanda ideal



$\boxed{BW = \omega_{c2} - \omega_{c1}}$

i) Encuentre la respuesta al impulso, $h(t)$, de un filtro S pasabajo ideal con $BW = 2\omega_0$ y espectro de fase $\underline{|\hat{h}(\omega)}$ $= -j\omega\tau_0$ $(\tau_0 > 0)$, y demuestre que S no es causal.

ii) Demuestre que cualquier filtro pasabajo cuyo espectro de amplitud $|\hat{h}(\omega)|$ es igual a cero para $|\omega| > \omega_0$, $\omega_0 > 0$ constante, es un sistema no-causal. De igual manera, demuestre que cualquier filtro (pasabanda o pasaalto) cuya espectro de amplitud $|\hat{h}(\omega)|$ es cero en la banda de rechazo, es no causal.

iii) En general, un filtro S cuya respuesta al impulso $h(t)$ es tal que

$$\|h\|_2 < \infty$$

es <u>causal</u> si y solamente si su espectro frecuencial $\hat{h}(\omega) = \mathcal{F}\{h(t)\}$ cumple con

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\ln \hat{h}(\omega)|}{1+\omega^2}\, d\omega < \infty$$

<u>Nota</u>: Esto se conoce como el teorema de Paley-Wiener.

Discuta las implicaciones de dicho teorema sobre filtros ideales (resuelva (i) y (ii) usando el teorema)..

<u>Suerte!</u>

Σ